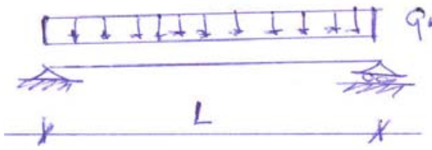
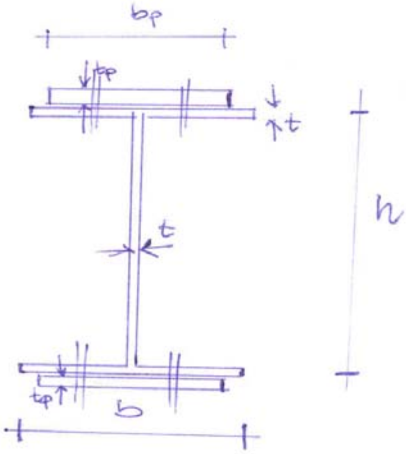
Università degli Studi di Salerno – Facoltà di Ingegneria
Corso di Tecnica delle Costruzioni II – Nuovo Ordinamento
Anno accademico 2004-2005 – Prova scritta del 21/07/2005

Esercizio n. 1 (Punti 8)

La trave in figura è realizzata in acciaio Fe360 (f_y=235 MPa) e la sua sezione è stata inizialmente progettata per un carico utile $q_k = 4 \cdot b \cdot t \cdot h \cdot f_y / L^2$. Si vuole rinforzare la sezione aggiungendo due piatti di spessore t_p e larghezza b_p, al fine di raddoppiare tale carico utile. Si dimensionino i piatti di rinforzo e la bullonatura che li connette alle ali assumendo i seguenti dati numerici:

L=4.0+N/5 [m];
t=20 mm;
b= 200 [mm];
h=300+10 *M* [mm]
Bulloni Classe 5.6
$f_{d,V}$= 212 MPa

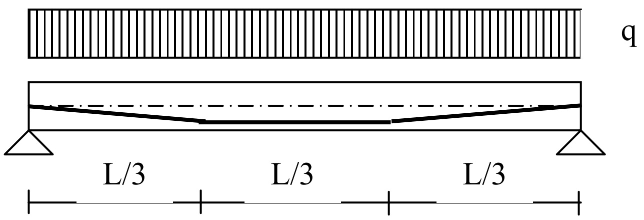


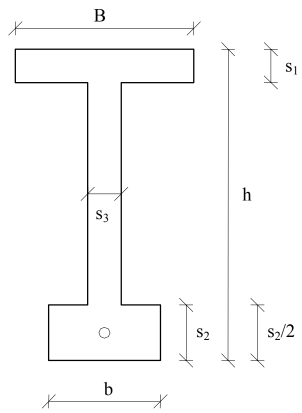


Esercizio n. 2 (Punti 6)

Le caratteristiche geometriche della sezione retta della trave sono:
B=70 cm, b=40 cm, h=100+5 *C* [cm], s_1=20 cm , s_2=25 cm, s_3=15 cm, L= 16 h, e= 40+2 *C* [cm], q=25-*C* [kN/m]

Si determini il valore dello sforzo normale di compressione per il quale la trave presenta freccia nulla in mezzeria.





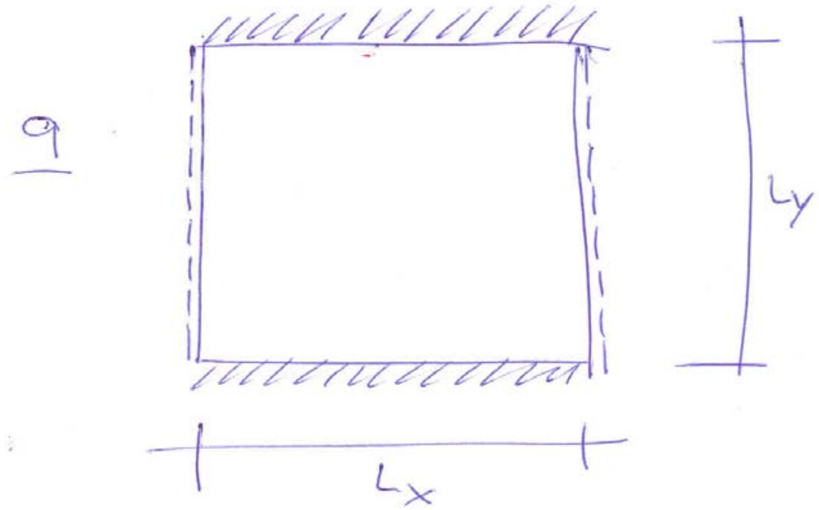
Esercizio n. 3 (Punti 8)

Con riferimento alla piastra rappresentata nella figura si determini determinino le sollecitazioni secondo il Metodo di Grashov, se ne dimensioni lo spessore, si progetti l'armatura e si ipotizzi una distinta delle armature a flessione.

L_x=3.0+N/5 [m];

L_y=3.0+C/5 [m];

q= 25 kN/m^2



Infine, fermi restando tutti gli altri parametri, si determini il valore di L_y tale che

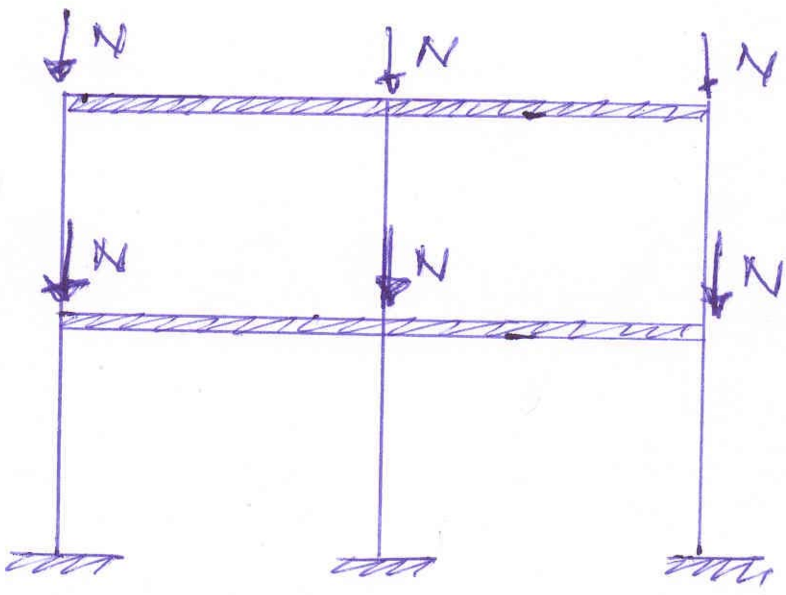
$$M_{x,max} = 1.5 \cdot M_{y,max}$$

Esercizio n. 4 (Punti 8)

Con riferimento alla struttura in oggetto sulla quale i carichi verticali dipendono dalla forza N=20 (*C*+*M*) kN si determini il moltiplicatore critico con riferimenti ai seguenti valori delle sezioni dei pilastri:

b=30 cm; h=20+2 *N* R_{ck}=25.0 MPa

L= 5.0 + *N*/5m H=3.0 m



Esercizio 1

Si assumono i seguenti valori numerici per le grandezze considerate:
L=4.8 m;
t=20 mm;
b= 200 mm;
h=400 mm
Bulloni Classe 5.6 ($f_{d,V}$= 212 MPa)

Il valore caratteristico q_k del carico variabile per il quale è stata progettata la sezione nel profilo metallico vale:

$$q_k = \frac{4 \cdot b \cdot t \cdot h \cdot f_y}{L^2} = \frac{4 \cdot 200 \cdot 20 \cdot 400 \cdot 235}{4800^2} = 65.27\ \text{N/mm}\ .$$

Si vuole raddoppiare il carico utile e, dunque, bisognerà dimensionare i piatti per un carico utile di 130.56 kN/m. Si propongono nel seguito due procedimenti alternativi basati sui due possibili modalità di calcolo allo Stato Limite Ultimo previsti dal D.M. 9/1/96, lo *Stato Limite Elastico della sezione* e lo *Stato Limite di Collasso Plastico della Struttura*. In ogni caso viene controllata anche la lo Stato Limite di Esercizio con riferimento alla condizione che la massima inflessione determinata dal sovraccarico variabile non superi 1/400 della luce.
Il peso proprio della trave metallica può valutarsi come segue:

$$g_k = [2 \cdot b \cdot t + (h - 2 \cdot t) \cdot t] \cdot \gamma_a = [2 \cdot 200 \cdot 20 + (400 - 2 \cdot 20) \cdot 20] \cdot 78 \cdot 10^{-6} = 1.19\ \text{N/mm} = 1.19\ \text{kN/m}$$

<u>Verifica allo Stato Limite elastico della Sezione</u>

Il momento sollecitante allo stato limite ultimo valutato a meno del peso dei piattini rinforzo vale:

$$M_{Sd} = (1.4 \cdot g_k + 1.5 \cdot q_k) \cdot \frac{L^2}{8} = (1.4 \cdot 1.19 + 1.5 \cdot 130.56) \cdot \frac{4.8^2}{8} = 568.82\text{kNm}\ .$$

Avendo fatto riferimento allo stato limite elastico della sezione, si può quantificare il modulo di resistenza della sezione rinforzata:

$$W_{tot} = \frac{M_{Sd}}{f_{sk}} = \frac{568820000}{235} = 2.42 \cdot 10^6\,\text{mm}^3\ .$$

Il modulo di resistenza della trave non rinforzata vale:

$$W_1 = \frac{I_{x,1}}{h/2} = \frac{3.668 \cdot 10^8}{200} = 1.83 \cdot 10^6\,\text{mm}^3$$

e, quindi, è necessario progettare un rinforzo che può essere costituito da una piastra metallica di larghezza pari a quella dell'ala (b_p=200 mm) e spessore t_p da determinare. Risulta:

$$W_{tot} = \frac{I_{x,tot}}{h/2 + t_p} \approx \frac{I_{x,tot}}{h/2} = \frac{I_{x,1} + 2 \cdot b_p \cdot t_p \cdot \left(\frac{h+t_p}{2}\right)^2}{h/2} \approx \frac{I_{x,1} + 2 \cdot b_p \cdot t_p \cdot (h/2)^2}{h/2} \Rightarrow$$

$$t_p = \frac{W_{tot} \cdot h/2 - I_{x,1}}{2 \cdot b_p \cdot (h/2)^2} = \frac{2.42 \cdot 10^6 \cdot 200 - 3.668 \cdot 10^8}{2 \cdot 200 \cdot (200)^2} = 7.33\,\text{mm} \;\Rightarrow\; t_p = 10\,\text{mm}.$$

Pertanto si ha

$$I_{x,tot} = I_{x,1} + b_p \cdot t_p \cdot \left(\frac{h+t_p}{2}\right)^2 = 3.668 \cdot 10^8 + 2 \cdot 200 \cdot 10 \cdot \left(\frac{400+10}{2}\right)^2 = 434900000\,\text{mm}^4.$$

e la verifica di deformabilità allo Stato Limite di Esercizio si può effettuare come segue:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_k \cdot L^4}{E \cdot I_{x,tot}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{130.56 \cdot 4800^4}{210000 \cdot 434900000} = 9.88\,\text{mm} \quad \Rightarrow \quad \frac{f}{L} = \frac{9.88}{4800} \approx \frac{1}{490} < \frac{1}{400}.$$

A questo punto deve essere calcolato il collegamento tra il piatto di rinforzo e la sezione a doppio T. Si ipotizza un collegamento bullonato realizzato tramite bulloni ϕ14 di classe 5.6 la cui resistenza unitaria vale:

$$F_b = A_{res} \cdot f_{V,d} = 115 \cdot 212 = 24380\,\text{N}.$$

La forza di scorrimento che deve essere sostenuta da questi bulloni può essere valutata tramite la formula di Jourawsky in funzione della sollecitazione tagliante il cui valore massimo si calcola come segue:

$$V_{Sd} = \left[1.4 \cdot \left(g_k + g_{p,k}\right) + 1.5 \cdot q_k\right] \cdot \frac{L}{2} = \left[1.4 \cdot (1.19 + 2 \cdot 0.31) + 1.5 \cdot 130.56\right] \cdot \frac{4.8}{2} = 476.10\text{kN}$$

avendo considerato anche il peso $g_{p,k}$ dei piatti di rinforzo.
Per il primo tratto di lunghezza L/8=0.60 m, lo scorrimento vale:

$$S = \tau \cdot b_p \cdot \Delta z = \frac{V_{Rd} \cdot S'}{I_{x,tot}} \cdot \Delta z = \frac{476100 \cdot 200 \cdot 10 \cdot 205}{434900000} \cdot 600 = 269305\,\text{N}$$

Ipotizzando di disporre i bulloni in coppia, si può determinare il numero di coppie di bulloni:

$$n_{c,b} = \frac{269305}{2 \cdot 24380} = 5.52$$

e dunque ad un passo

$$p_{c,b} = \frac{\Delta z}{n_{c,b}} = \frac{600}{5.52} = 108.6 \approx 100 \text{ mm} \ .$$

Il passo può essere ridotto verso la mezzeria della trave poiché il taglio si riduce. Nella tabella seguente si riporta una possibile sequenza di passi:

V_{Sd}	z	Δz	$n_{c,b}$	$p_{c,b}$
[N]	[mm]	[mm]		[mm]
476100	0	600	5.52	100
357075	600	600	4.14	140
238050	1200	600	2.76	210
119025	1800	600	1.38	430
0	2400			

In realtà, dovendo osservare dei valori massimi del passo tra le coppie di bulloni disposte lungo l'asse della trave, non si supererà il valore pari a $10\phi=140$ mm.

N.B.: in linea di principio, avendo ipotizzato che le piastre di rinforzo e la bullonatura di collegamento siano sollecitati anche dal peso proprio della trave, si deve ritenere che la trave sia puntellata durante l'esecuzione dell'intervento di rinforzo.

Verifica allo Stato Limite Plastico della Struttura

Ipotizzando che la sezione possa sviluppare interamente la sua resistenza plastica si ha che il suo momento plastico vale:

$$M_{Rd,pl} = Z \cdot f_{a,d} = 2 \cdot \left[b \cdot t \cdot \left(\frac{h-t}{2} \right) + \frac{t}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] \cdot \frac{f_{ak}}{1.12} =$$

$$= 2 \cdot \left[200 \cdot 20 \cdot \left(\frac{400-20}{2} \right) + \frac{20}{2} \cdot \left(\frac{400}{2} - 20 \right)^2 \right] \cdot \frac{235}{1.12} = 2168000 \cdot 209.82 = 454.90 \text{ kNm}$$

che inferiore di quello sollecitante. Per questa ragione bisogna rinforzare la sezione con due piatti di dimensione b_p=200 mm e t_p da determinare come segue:

$$M_{Sd,pl} = 2 \cdot \left[b \cdot t \cdot \left(\frac{h-t}{2} \right) + \frac{t}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 + t_p \cdot b_p \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{t_p}{2} \right) \right] \cdot \frac{f_{ak}}{\gamma_a}$$

da cui

$$M_{Sd,pl} \approx 2 \cdot \left[b \cdot t \cdot \left(\frac{h-t}{2} \right) + \frac{t}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 + t_p \cdot b_p \cdot \frac{h}{2} \right] \cdot \frac{f_{ak}}{\gamma_a} \Rightarrow$$

$$t_p = \frac{M_{Sd,pl}/2 - \left[b \cdot t \cdot \left(\frac{h-t}{2} \right) + \frac{t}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} - t \right)^2 \right] \cdot \frac{f_{ak}}{\gamma_a}}{b_p \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{f_{ak}}{\gamma_a}} = .$$

$$= \frac{568.82 \cdot 10^6/2 - \left[200 \cdot 20 \cdot 190 + 10 \cdot (200-20)^2 \right] \cdot \frac{235}{1.12}}{200 \cdot 200 \cdot \frac{235}{1.12}} = 6.78\,\text{mm} \Rightarrow t_p = 10\,\text{mm}$$

Il calcolo della bullonatura deve essere condotto in maniera che l'azione normale agente in mezzeria sui piatti sia trasferita alla trave nel tratto compreso tra l'appoggio e la stessa sezione di mezzeria:

$$F_p = t_p \cdot b_p \cdot \frac{f_{ak}}{\gamma_a} = 20 \cdot 200 \cdot \frac{235}{1.12} = 839285\,\text{N}$$

da cui si può ottenere il numero di connettori necessari:

$$n_b = \frac{F_p}{F_b} = \frac{839285}{24380} = 34.42 \Rightarrow n_b = 36 \ .$$

Tali bulloni possono essere disposti in coppie, ognuno in corrispondenza delle due semi-ali, con un passo costante lungo nel tratto compreso tra l'appoggio e la sezione di mezzeria:

$$p_{c,b} = \frac{L/2}{n_{c,b}} = \frac{4800/2}{36/2} = 133.33\,\text{mm} \Rightarrow p_{c,b} = 120\,\text{mm}$$

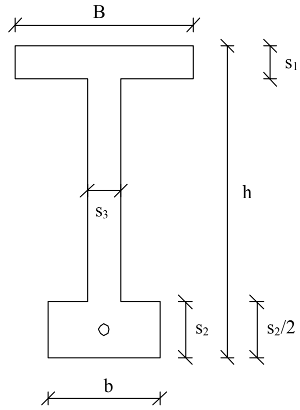
Considerazioni conclusive

I due metodi proposti per la soluzione del problema sono alternativi (almeno nell'ipotesi che la sezione sia in grado di sviluppare tutta la resistenza plastica senza instabilizzarsi) e possono condurre a risultati diversi in termini di dimensioni degli elementi di rinforzo e del loro collegamento. I due metodi di verifica sono ammessi dalla vigente normativa nazionale (D.M. 9/1/96); tale normativa prevede che venga considerato un fattore parziale di sicurezza γ_a di valore unitario nel caso di SL elastico della sezione, mentre si deve assumere un valore γ_a=1.12 nel caso di consideri lo SL plastico della struttura. Nei fatti questa diversa assunzione consente di "coprire" in parte la differenza che si determina nella valutazione del valore di progetto del momento resistente M_{Rd} della sezione a causa della differenza tra il modulo di resistenza W della sezione ed il suo modulo plastico Z: nel caso considerato tale rapporto vale:

$$\frac{Z}{W} = \frac{2168000}{1830000} \approx 1.18$$

leggermente maggiore dei valori di 1.10÷1.15 relativi ai comuni profili commerciali a causa del fatto che l'anima ha uno spessore relativamente più grande di quella riscontrabile nei profili i cui sopra.
Infine si osserva che nel primo caso si è adottato un passo variabile della bullonatura lungo l'asse della trave seguendo la sollecitazione di scorrimento che - come quella tagliante da cui dipende direttamente nel caso elastico –decresce dall'appoggio alla mezzeria. Viceversa nel caso di un calcolo plastico il passo è stato assunto costante fruendo dell'ipotesi di sufficiente duttilità dei bulloni che sono, comunque, sollecitati lungo l'asse della trave:

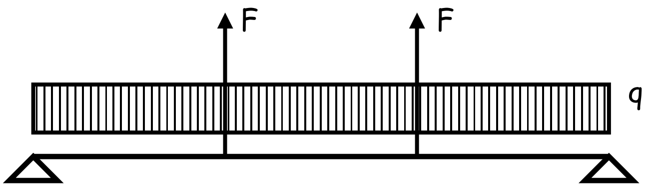
Esercizio 2



Si assumono nei calcoli i seguenti valori numerici:

B=70 cm, b=40 cm, h=150 cm,
s_1=20 cm , s_2=25 cm, s_3=15 cm,
L= 2400 cm, e= 60 cm, q=5 kN/m

Con riferimento allo schema proposto, il carico equivalente alla precompressione può essere rappresentato nella figura seguente (con esclusivo riferimento alle azioni dirette ortogonalmente all'asse della trave):



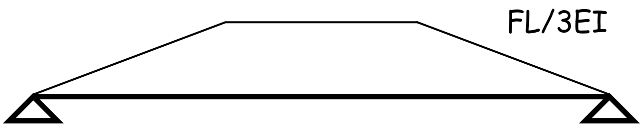
Il valore della forza concentrata verticale, derivante dalla deviazione del tracciato del cavo, si determina come segue:

$$F = N \cdot \sin\varepsilon = N \cdot \sin\frac{e}{L/3} = N \cdot \sin\frac{60}{2400/3} = 0.075 \cdot N\ .$$

L'equazione risolutrice del problema è la seguente:

$$f_q + f_F = 0$$

avendo indicato con f_q ed f_F i due contributi alla freccia dovuti al carico q ed alle forze F.
Il secondo contributo può essere stimato tramite i corollari di Mohr valutando il momento in mezzeria della trave "caricata" con il diagramma delle curvature:



$$f_F = -\frac{FL}{3EI} \cdot \frac{1}{3} L \cdot \frac{L}{2} + \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{FL}{3EI} \cdot \frac{L}{3} \cdot \left(\frac{L}{9} + \frac{L}{6} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{FL}{3EI} \cdot \left(\frac{L}{6} \right)^2 \right] = -\frac{23}{648} \cdot \frac{FL^3}{EI}$$

da cui

$$\frac{5}{384}\cdot\frac{qL^4}{EI}-\frac{23}{648}\cdot\frac{FL^3}{EI}=0$$

da cui

$$F=\frac{648}{23}\cdot\frac{5}{384}\cdot qL=\frac{648}{23}\cdot\frac{5}{384}\cdot 15\cdot 24=44\ \text{kN}$$

e dunque:

$$F=0.075\cdot N\Rightarrow N=\frac{44}{0.075}=586.67\ \text{kN}$$

Esercizio 3

Si assumono nei calcoli i seguenti valori numerici:
L_x=3.8 m;
L_y=5.0 m;
q= 25 kN/m^2

Nello spirito del Metodo di Grashov si considerano due strisce dirette ortogonalmente e si determinano i valori del carico q_x e q_y che si ripartiscono idealmente secondo dette direzioni:

$$\begin{cases} q_x + q_y = q \\ \dfrac{5}{384} \cdot \dfrac{q_x L_x{}^4}{D_x} = \dfrac{1}{384} \cdot \dfrac{q_y L_y{}^4}{D_y} \end{cases}$$

da cui, posto D_x=D_y, si ha

$$\begin{cases} q_x = \dfrac{L_y{}^4}{5L_x{}^4 + L_y{}^4} \cdot q = \dfrac{5^4}{5 \cdot (3.8)^4 + 5^4} \cdot (25+5) = 11.24\ \text{kN/m}^2 \\ q_y = \dfrac{5L_x{}^4}{5L_x{}^4 + L_y{}^4} \cdot q = \dfrac{5 \cdot (3.8)^4}{5 \cdot (3.8)^4 + 5^4} \cdot (25+5) = 18.76\ \text{kN/m}^2 \end{cases}$$

avendo considerato anche forfaittariamente un peso proprio della soletta g pari 5.0 kN/m^2 (corrispondente ad uno spessore di 20 cm)
Con riferimento a tali valori dei carichi ed agli schemi strutturali relativi alle due strisce individuate lungo x e y si possono valutare i seguenti valori massimi e minimi dei momenti flettenti:

$M_{x,min}$= 0
$M_{x,max}$= 20.29 kNm/m

$M_{y,min}$= -39.08 kNm/m
$M_{y,max}$= 19.54 kNm/m

Con riferimento al massimo dei valori (in senso assoluto) si può dimensionare lo spessore della soletta procedendo, ad esempio, secondo il metodo tabellare messo a punto per il progetto/verifica delle sezioni in c.a. alle <u>tensioni ammissibili</u>:

$$d = r \cdot \sqrt{\frac{M}{b}} = 0.273 \cdot \sqrt{\frac{3908}{1}} = 17.06\ \text{cm} \Rightarrow h = 20\ \text{cm}\ .$$

Pertanto si adotta uno spessore di 20 cm e, dunque, non è necessario ricalcolare le sollecitazioni per tener conto in maniera più precisa del suo peso proprio.
Sulla base di questo risultato è possibile determinare anche le armature necessarie nei punti di momento massimo e minimo (si utilizza un acciaio FeB38k, σ_s=215 MPa):

- <u>direzione x, momento massimo (sezione di mezzeria)</u>

$$A_{s,inf,x} = \frac{M_{x,max}}{0.9 \cdot d \cdot \sigma_s} = \frac{20290000}{0.9 \cdot 170 \cdot 215} = 616\ mm^2 \Rightarrow 1\phi 14/20\ cm$$

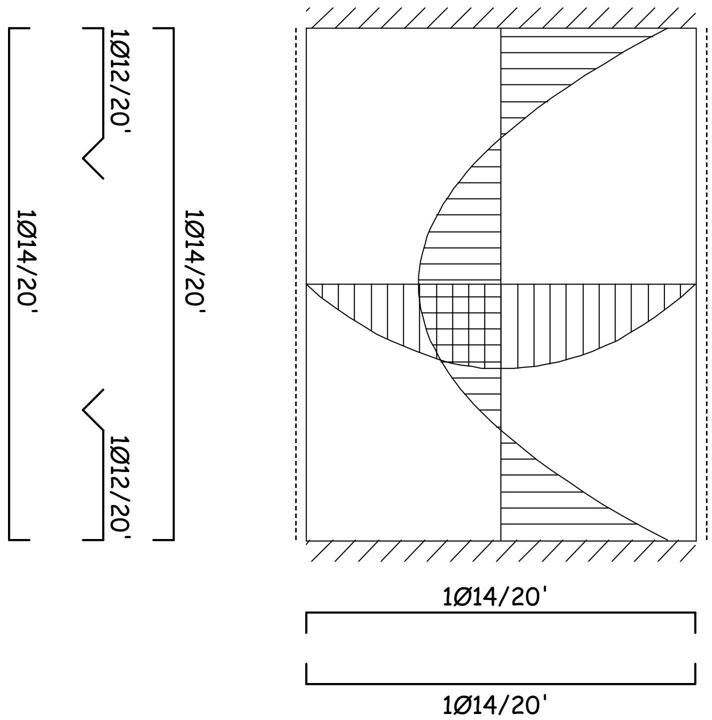
- <u>direzione y, momento minimo (sezione di appoggio)</u>

$$A_{s,sup,y} = \frac{M_{y,min}}{0.9 \cdot d \cdot \sigma_s} = \frac{39080000}{0.9 \cdot 170 \cdot 215} = 1188\ mm^2 \Rightarrow 1\phi 14/20' + 1\phi 12/20'$$

- <u>direzione x, momento massimo (sezione di mezzeria)</u>

$$A_{s,inf,y} = \frac{M_{y,max}}{0.9 \cdot d \cdot \sigma_s} = \frac{19540000}{0.9 \cdot 170 \cdot 215} = 594\ mm^2 \Rightarrow 1\phi 14/20\ cm$$

Una possibile disposizione delle armature è riportata nella figura seguente:



<u>Quesito complementare</u>

Per determinare il valore di L_y in corrispondenza del quale, a parità degli altri parametri, valga la condizione $M_{x,max}$=1.5 $M_{y,max}$ si può imporre tale condizione come ulteriore equazione del sistema derivante dall'impostazione del Metodo di Grashov:

$$\begin{cases} q_x + q_y = q \\ \dfrac{5}{384} \cdot \dfrac{q_x L_x^{\ 4}}{D_x} = \dfrac{1}{384} \cdot \dfrac{q_y L_y^{\ 4}}{D_y} \\ \dfrac{q_x L_x^{\ 2}}{8} = 1.5 \cdot \dfrac{q_y L_y^{\ 2}}{24} \end{cases}$$

Tale sistema ammette più soluzioni ma soltanto è accettabile fisicamente (L_y>0)

$$\begin{cases} q_x = 16.67\ \mathrm{kN/m^2} \\ q_y = 13.33\ \mathrm{kN/m^2} \\ L_y = 6.008\ \mathrm{m} \end{cases}$$

Esercizio 4

Si assumono nei calcoli i seguenti valori numerici:

N=280 kN

b=30 cm; h=28 cm R_{ck}=25.0 MPa

L= 5.8 m H=3.0 m

Nella verifica delle membrature che costituiscono la struttura rappresentata, la conoscenza del moltiplicatore critico α_{cr} è necessaria per riconoscere i casi in cui la struttura è sensibile o meno agli effetti del secondo ordine.

Tale moltiplicatore si può stimare come segue secondo il ben noto metodo di Horne:

$$\alpha_{cr} = 0.9 \cdot \min_{i=1,2} \frac{h_i}{\Delta_i}$$

nel quale Δ_i rappresenta lo spostamento interpiano prodotto al piano i-esimo applicando un ai piani superiori delle forze orizzontali pari agli scarichi verticali del piano stesso (in questo modo, per inciso, ad ogni piano il tagliante T_i è pari alla risultante dei carichi verticali applicati superiormente ad esso):

Risulta:

$$3N - 3 \cdot \frac{12 \cdot EI}{h_2^3} \cdot \Delta_2 = 0 \Rightarrow \Delta_2 = \frac{N \cdot h_2^3}{12 \cdot EI} \Rightarrow \alpha_{cr,2} = 0.9 \cdot \frac{h_2}{\Delta_2} = \frac{10.8 \cdot EI}{N \cdot h_2^2}$$

$$6N - 3 \cdot \frac{12 \cdot EI}{h_1^3} \cdot \Delta_1 = 0 \Rightarrow \Delta_1 = \frac{N \cdot h_1^3}{6 \cdot EI} \Rightarrow \alpha_{cr,1} = 0.9 \cdot \frac{h_1}{\Delta_1} = \frac{5.4 \cdot EI}{N \cdot h_1^2}$$

pertanto risulta

$$\alpha_{cr} = \frac{5.4 \cdot EI}{N \cdot h_1^2} = \frac{5.4 \cdot 0.4 \cdot 28848 \cdot \frac{300 \cdot 280^3}{12}}{280000 \cdot 3000^2} = \frac{3.420 \cdot 10^{13}}{2.52 \cdot 10^{12}} = 13.54$$

avendo utilizzato un valore ridotto al 40% della rigidezza flessionale al fine di tener conto della fessurazione.